TECHNISCHE MECHANIK 9(1988) Heft 3, S. 218-224

Die Informationsentropie als Grundlage für eine Strukturtheorie der Turbulenz und die Entwicklung von Berechnungsverfahren

Hans-Joachim Mascheck, Dieter Leuschner

1. Einleitung

Auf der Grundlage des erreichten hohen Standes der Meßtechnik und der statistischen Auswerteverfahren wurden in den vergangenen Jahrzehnten umfangreiche Untersuchungen der Bewegungsformen in turbulenten Strömungen angestellt, deren Ergebnisse in hunderten von Originalarbeiten und einer großen Zahl von Übersichtsartikeln ([6] bis [8], [14], [16] u. a.) veröffentlicht worden sind. Die statistischen Strukturuntersuchungen sind zweifellos keine vorübergehende Erscheinung im auf und ab der Ideen in der Turbulenzforschung, sondern eine grundlegende Methode von bleibender Bedeutung. Nachdem eine Fülle konkreter Ergebnisse gewonnen wurde, die zwar heute für ein volles Verständnis aller Vorgänge noch nicht ausreichen, aber doch bereits wesentliche Einsichten vermitteln, lenkte Hussain [14] die Aufmerksamkeit auf die grundsätzlichen Aspekte des Strukturbegriffs in der Turbulenztheorie und betonte dabei seinen statistischen Charakter. Ausgehend von einsr kritischen Wertung der bei den experimentellen Strukturuntersuchungen angewandten Ansätze und Methoden präzisierte er die Definition der Struktur in der Turbulenz und entwarf ein allgemeines Verfahren zur Herleitung von Strukturformen aus Messungen.

Die theoretische Bewältigung des Strukturproblems und die Anwendung der Erkenntnisse zur sicheren Vorausberechnung und damit zur praktischen Beherrschung turbulenter Vorgänge gehört zu den wichtigsten aktuellen Aufgaben der Turbulenzforschung. Nach [14] versprechen die durch "management and control of turbulence" möglichen neuen technischen Lösungen auf vielen Gebieten einen beträchtlichen ökonomischen Nutzen. Die Entdeckung und der experimentelfe Nachweis der kohärenten Strukturen führten zu Beginn der 70er Jahre zu einer intensiven Diskussion über die Rolle der Ordnung bzw. der Unregelmäßigkeit in turbulenten Strömungan [1] bis [3]. Zur quantitativen Kennzeichnung des Grades der Ordnung bzw. der Unregelmäßigkeit wurde in [25] eine Informationsentropie der Turbulenz eingeführt, die sich von den Entropien einiger früherer Ansätze (vgl. Abschn. 10) unterscheidet. Im folgenden wird dargelegt, daß diese Entropie eine geeignete Grundlage für die Entwicklung einer Strukturtheorie der Turbulenz ist.

2. Informationsentropie turbulenter Strömungen

Was in der Turbulenztheorie gemeinhin als Unregelmäßigkeit bezeichnet wird, ist die zeitliche Aufeinanderfolge einer großen Vielfalt unterschiedlicher Geschwindigkeitsfelder in ein und derselben Strömung. Zur quantitativen Charakterisierung dieser Vielfalt könnte man die Anzahl der auftretenden individuellen Felder verwenden, wenn diese endlich wäre. Normalerweise geht man aber davon aus, daß ein Fluid unendlich viele Freiheitegrade der Bewegung hat, so daß die Anzahl der in einem gegebenen Bereich möglichen unterschiedlichen Geschwindigkeitsfelder grundsätzlich unendlich ist. Das ist natürlich eine Idealisierung, da jedes endliche Fluidvolumen endlich viele Moleküle mit endlich vielen Freiheitegraden enthält. Auch sind zwei Geschwindigkeitsfelder infolge der in molekularen Systemen stets vorhandenen thermischen

Fluktuationen nur dann unterscheidbar, wenn ihre Differenz einen bestimmten Mindestwert überschreitet. Aus diesem Grunde ist die Menge der voneinander unterscheidbaren Geschwindigkeitsfelder die in einem endlichen Fluidvolumen bei endlicher Gesamtenergie auftreten können, zwar ungeheuer groß, aber endlich. Die Annahme einer unendlichen Menge ist eine oft zulässige ldealisierung. Für das folgende ist aber gerade die Endlichkeit (oder wenigstens die Abzählbarkeit) von Bedeutung. Das Erscheinungsbild und die Wirkungen einer turbulenten Strömung werden nicht nur durch die Anzahl der auftretenden unterschiedlichen Geschwindigkeitsfelder, sondern auch durch die relative Häufigkeit ihres Auftretens bestinmt. Ein Maß für die Vielfalt, das das berücksichtigt, ist die Shannonsche Informationsentropie. Sind $A_i, i = 1,2,...$ die unterscheidbaren Geschwindigkeitsfelder und $p_i, i = 1,2,...$ die Wahrscheinlichkeiten (relativen Häufigkeiten) ihres Auftretens, so ist die Informationsentropie der dadurch gegebenen statistischen Gesamtheit gleich

$$H = -\sum_i p_i \cdot \log_2 p_i \tag{1}$$

[10], [15], [28], [30]. Sie gibt an, welche Informationsmenge (in Bit) im Mittel theoretisch erforderlich ist, um das jeweils vorliegende Feld A_i aus der vorgegebenen Menge $\{A_k,\ k = 1, 2,... \}$ eindeutig zu kennzeichnen. Entwickelt nan die Geschwindigkeitsfelder $\vec{u}\ (\vec{r},\ t)$ einer inkompressiblen Strömung in einem gegebenen Bereich nach einem vorgegebenen System solenoidaler Vektorfelder $\vec{\varphi}_i(\vec{r})$ in der Form

$$\vec{u}(\vec{r},t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \cdot \vec{\varphi}_i(\vec{r}) \tag{2}$$

und beschränkt sich auf eine endliche Zahl n von Gliedern, so kann man nach [4], [12], [17] u. a. die Koeffizienten a_i als Koordinaten eines n-dimensionalen Funktionenraums auffassen und dort eine Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(a_1, a_2, ..., a_n)$ einführen. Unter Berücksichtigung der thermischen Fluktuationen im Fluid erhält man dafür aus den Navier-Stokesschen Gleichungen eine Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \rho\, \dot{a}_i}{\partial a_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial a_i \partial a_j} \quad . \tag{3}$$

Die S_{ij} bringen hierin die Wirkungen der thermischen Fluktuationen zum Ausdruck [17]. Zur Definition der Informationsentropie ist es notwendig, zu einer abzählbaren Menge von Geschwindigkeitsfeldern überzugehen, indem man jeweils die infolge der thermischen Fluktuationen nicht unterscheidbaren zusammenfaßt. (Das entspricht der Berücksichtigung der quantentheoretischen Unschärfe in der klassischen statistischen Mechanik.) So erhält man

$$H = -\int \ldots \int \rho(a_1, a_2, ..., a_n) \cdot \log_2 [\rho(a_1, a_2, ..., a_n)] \mathrm{d}\, a_1 \cdots \mathrm{d}\, a_n \ - C \tag{4}$$

wobei die Kostante C von der Unschärfe bestimmt wird. Die Fokker-Planck-Gleichung (3) liefert für die zeitliche Entwicklung der Entropie nach einigen Umformungen die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\partial \dot{a}_i}{\partial a_i}} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} S_{ij} \cdot \overline{\frac{\partial \log_2 \rho}{\partial a_j} \cdot \frac{\partial \log_2 \rho}{\partial a_j}} \tag{5}$$

(vgl. [17]).
Auf die mit den hier angegebenen Operationen verbundenen mathenatischen Probleme - Beschränkug auf endlich viele Glieder in (2), Berücksichtigung der Randbedingungen, Berücksichtigung der thermischen Fluktuationen als stochastische Kräfte, Regularität der Dichtefunktionen u. a. - sei hier nur hingewiesen. Die in der Vergangenheit gegen einzelne Schritte dieses Vorgehens vorgebrachten Einwände und Bedenken konnten weitestgehend entkräftet werden, was natürlich eine ausführlichere und exaktere Darstellung erfordert, als hier im Interesse der Kürze gewählt wurde.

3. Entropie als Strukturmaß

Sind die Wahrscheinlichkeiten p_i der einzelnen Realisierungen A_i einer statistiscben Gesamtheit sehr unterschiedlich, so ist die nach (1) berechnete Entropie geringer als bei gleichen Wahrscheinlichkeiten. Das gilt insbesondere dann, wenn einige der Ai wesentlich häufiger auftreten als die restlichen. Gerade das kennzeichnet aber die kohärenten Strukturen in turbulenten Strömungen (vgl. [14], Abschn. 2.3.1. "Preferred mode"). Der Zahlenwert der Informationsentropie ist mithin ein Maß für die Strukturiertheit der Erscheinungen. Die Informationsentropie ist eines der in der mathematischen Literatur eingeführten Strukturmaße für Wahrscheinlichkeitsvektoren [11], [19], was allein schon ihre Verwendung in einer Strukturtheorie der Turbulenz nahelegt. Ihr Vorzug gegenüber den anderen in [19] erwähnten Strukturmaßen besteht einerseits in der engen Beziehung zu der in den anderen Teilgebieten der statistischen Physik (insbes. auch der Thermodynamik) eingeführten Entropie und andererseits in ihrer Eigenschaft als Informationsmaß, durch die eine Verbindung zu den Problemen der Berechnung hergestellt wird.

Mit der Einführung eines Maßes für die Strukturiertheit wird jedoch das Strukturproblem selbst noch nicht gelöst, sondern nur seine Bedeutung unterstrichen. Es bleibt die Frage, wie Strukturen definiert und in die Theorie und Berechnung turbulenter Vorgänge einbezogen werden können. Zur Beantwortung lassen sich ebenfalls informationstheoretische Begriffe und Sätze nutzen, so daß man im Ergebnis mit Hilfe des Informationsbegriffs zu einer einheitlichen, in sich geschlossenen Strukturtheorie der Turbulenz gelangt, die zugleich neue Wege zur praktischen Berechnung turbulenter Vorgänge weist. Die bisher ohne jede Bezugnahme auf den Begriff der Information mehr oder weniger intuitiv entwickelten Verfahren zur experimentellen Bestimmung der Formen kohärenter Strukturen liefern auch im Sinne der informationstheoretischen Strukturdefinition gültige Approximationen.

Im folgenden werden die gedanklichen Schritte eines möglichen (sicherlich nicht des einzigen) Zugangs zur informationstheoretisch begründeten Strukturtheorie der Turbulenz skizziert.

4. Optimalkodes

Der Zahlenwert der Shannonschen Informationsentropie gibt, wie schon erwähnt, die theoretisch im Mittel erforderliche Informationsmenge zur Kennzeichnung des jeweils vorliegenden Falles an. Den Sinn dieser Aussage erkennt man an einfachen Beispielen: Umfaßt die Gesamtheit 4 Fälle $A_1,\dots,A_4$, die mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/4$, $p_3 = 1/8$ und $p_4 = 1/8$ auftreten, so ist die Entropie gleich

$$H = -\ \frac{1}{2}\cdot\log_2\frac{1}{2}\ -\ \frac{1}{4}\cdot\log_2\frac{1}{4}\ -\ \frac{1}{8}\cdot\log_2\frac{1}{8}\ -\ \frac{1}{8}\cdot\log_2\frac{1}{8}\ = 1{,}75\ \text{Bit} \qquad \textbf{(6)}$$

Dieser Wert läßt sich durch geeignete Kodierung tatsächlich erreichen. Man verwendet Binärzahlen, bei denen jede Stelle eine Informationsmenge von 1 Bit verkörpert, und legt folgenden Kode fest:

$$A_1 \sim 0 \qquad A_2 \sim 10 \qquad A_3 \sim 110 \qquad A_4 \sim 111 \qquad \textbf{(7)}$$

Obwohl man dabei zur Kennzeichnung einzelner Fälle 2 oder sogar 3 Bit benötigt, ergibt sich bei Berücksichtigung der Häufigkeit im Mittel tatsächlich nur 1,75 Bit für die Kennzeichnung eines Falls. Damit der Kode variabler Länge eindeutig ist, darf ein kürzeres Kodewort niemals zugleich Anfangsteil eines längeren Kodeworts sein (Präfixkode [28]). Ein solcher Kode, mit dem der theoretische Mindestwert der mittleren Informationsmenge je Ereignis erreicht wird, hei0t Optimalkode [28]. Schematische Kodierungen, z. B. in der Form

$$A_1 \sim 00 \qquad A_2 \sim 01 \qquad A_3 \sim 10 \qquad A_4 \sim 11 \qquad \textbf{(8)}$$

sind bei unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten nicht optimal.

Bei dem angeführten Beispiel ist der Unterschied der Informationsmengen - 1.75 Bit bei Optimalkode gegenüber 2 Bit bei schematischer Kodierung - relativ gering. Bei statistischen Gesamtheiten, die sehr viele Fälle mit sehr unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten unfassen, wie das bei den Geschwindigkeitsfeldern turbulenter Strömungen der Fall ist, unterscheiden sich die Informationsmengen gewöhnlich um mehrers Größenordnungen, so daß die Aufstellung eines Optimalkodes zu einer wesentlich rationelleren Beschreibung der Zustände und Vorgänge führen kann.

5. Kodierung und Beschreibung

Aus den Ergebnissen der Strukturuntersuchungen geht hervor, daß die Entropie turbulenter Ströungen aller Wahrscheinlichkeit nach wesentlich geringer ist, als bisher angenommen wurde, so daß die Suche nach einem optimalen Kode zur Bezeichnung der einzelnen Geschwindigkeitsfelder lohnend erscheint. Bei praktischen Berechnugen wurden die Felder bisher durch die Angabe von Funktionswerten an diskreten Punkten (z. B. bei der Anwendung des Differenzenverfahrens) oder der Koeffizienten von Reihenentwicklungen dargestellt. Jede derartige Kennzeichnung von Objekten durch Folgen von Zahlenwerten (Parametern) ist im Sinne der Informationstheorie eine Kodiermng, und die Suche nach einem Optimalkode ist gleichbedeutend mit der Suche nach einer optimalen Darstellung durch Zahlenwerte.

Tatsächlich sind aber die bisher in der Strömungsmechanik angewandten Darstellungsarten nicht nur Kodes, sondern sie liefern zugleich auch die Beschreibung der Objekte. Bei den informationstheoretischen Betrachtungen wird vereinfachend vorausgesetzt, daß es irgendein Dokument gibt - z. B. eine Liste oder einen Katalog - das die Zuordnung der Kodewörter zu den einzelnen Objekten festlegt. Im Falle so umfangreicher Objektmengen, wie sie Strömungsfelder darstellen, ist das nicht durchführbar. Der Ausweg besteht darin, den Kode so zu gestalten, daß die wesentlichen Eigenschaften der zugeordneten Objekte mit Hilfe eines Algorithmus unmittelbar aus den Kodewörtern (Parametern, Zahlenwerten) berechnet werden können. Auf die

Erfüllung dieser Bedingung kann man praktiech nicht verzichten. Bei der Entwicklung des Kodes ist daher auf die Herstellung eines einfachen Zusammenhangs zwischen der Form der Kodewörter (Zahlenfolgen) und der Eigenschaften der durch sie bezeichneten Objekte zu achten. Bei den bisherigen Darstellunssarten ist dieser dadurch gegeben, daß das gesamte Kodewort aus einer Folge von Zahlenwerten (Parametern) besteht, deren jeder unabhängig von den anderen eindeutig eine bestimmte Eigenschaft oder einen bestimmten Anteil des Geschwindigkeitsfelds bezeichnet. Ob es einen Optimalkode im Sinne der Informationstheorie gibt, der diese zusätzliche Bedingung erfüllt, ist jedoch zweifelhaft. Dem kann dadurch Rechnung getragen werden, daß man anstelle eines Optimalkodes eine Beschreibung mit minimalem Informationsaufwand anstrebt.

6. Rationelle Beschreibung turbulenter Strömungsfelder

Als zusätzliches Hilfsmittel zur Beschreibung der Geschwindigkeitsfelder verwendet man in der Turbulenztheorie die Zerlegung in Summanden, z. B. in Grundströmung und turbulente Zusatzströmung, in Grundströmung, Grobturbulenz und Feinturbulenz (beim Verfahren der numerischen Simulation der großen Turbulenzwirbel [9], [13]), in Grundströmung, kohärente Strukturen und nichtkohärente Turbulenz (bei Strukturuntersuchungen [14]) oder in eine größere Anzahl von Anteilen unterschiedlicher Wellenzahl (für allgemeine theoretische Untersuchungen [4]). Durch diese Zerlegungen wird die Beschreibung der Gesamtströmung auf die Beschreibung der Summanden zurückgeführt. Dabei ergibt sich die Frage, ob und in welchem Maße der erforderliche Informationsaufwand durch die Art der Zerlegung beeinflußt wird.

Vor der Zerlegung bestimmt die Informationsentropie der statistischen Gesamtheit den theoretischen Mindestwert. Dieser kann durch die Zerlegung selbstverständlich nicht verringert, wohl aber erhöht werden. Optimal ist die Zerlegung offenbar damn, wenn sie zu keiner oder nur zu einer unbedeutenden Erhöhung des theoretischen Minimalwerts führt und zugleich die Herabsetzung der praktiach erforderlichen Informationsmenge in Richtung auf diesen Minimalwert erleichtert.

Soll die theoretisch erforderliche Informationsmenge durch eine Zerlegung nicht erhöht werden, so muß die Summe der Entropien der Teilgesamtheiten gleich der Entropie der ursprünglichen Gesamtheit sein. Das ist genau dann der Fall, wenn die Parameter, die die Elemente der Teilgesamtheiten beschreiben, voneinander statistisch unabhängig sind. Die andernfalls auftretende Entropieerhöhung wird als Transinformation [10] bezeichnet. Jede Zerlegung in Anteile, zwischen denen eine statistische Abhängigkeit besteht, setzt mithin die zur Bezeichnung der einzelnen Felder theoretisch erforderliche Mindestinformationsmenge herauf und muß vermieden werden, wenn eine rationelle Beschreibung angestrebt wird. Dabei ist zu beachten, daß fehlende Korrelationen kein Beweis für statistische Unabhängigkeit sind. Beispielsweise korrelieren die Anteile einer harmonischen Zerlegung turbulenter Strömungsfelder nicht oder nur sehr wenig miteinander, obwohl zwischen ihnen nach den Ergebnissen der Strukturuntersuchungen eine erhebliche statistische Abhängigkeit vorhanden sein muß. Ältere Ansätze, die die Zerlegung in nichtkorrelierende Anteile zum Ziel hatten [21], sind daher nicht als Grundlage für eine rationelle Beschreibung geeignet.

Trotz dieser Einschränkung sind Korrelationen ein sehr nützliches Hilfsmittel zur schrittweisen Verbesserung einer angenäherten Zerlegung in unabhängige Anteile, da nichtverschwindende

Korrelationen stets eine statistische Abhängigkeit bedeuten und die Zerlegung in unabhängige Anteile erfordert, daß alle Bewegungselemente, zwischen denen eine Abhängigkeit erkennbar ist, demselben Anteil zugerechnet werden müssen. Die Aufdeckung solcher Abhängigkeiten mit Hilfe von Korrelationen gelingt jedoch häufig erst durch zusätzliche Maßnahmen - bedingte Mittelung (conditional sampling), Ausrichtung der Phasenlage (phase alignment) u.a. Die bei der experimentellen Ermittlung von Turbulenzstrukturen angewandten Verfahren und besonders die in [14] beschriebene allgemeine Methode sind Beispiele für eine solche Vorgehensweise. Die informationstheoretische Begründung kann dem zunächst nichts hinzufügen. Sie stellt aber eine Verbindung zwischen der Strukturzerlegung, der rationellen Beschreibung und schließlich der Berechnung turbulenter Vorgänge her und ordnet damit den Begriff der Struktur in einen größeren Rahmen ein.

7. Zum Strukturbegriff

Bei der Ausarbeitung einer Strukturtheorie wird eine Definition der kohärenten Strukturen benötigt. Nach den vorstehenden Überlegungen ist es prinzipiell möglich, eine solche aus der Forderung nach einer Darstellung der Geschwindigkeitsfelder mit geringstem Informationsaufwand herzuleiten [24].

Die zur Beschreibung der individuellen Geschwindigkeitsfelder theoretisch und praktisch erforderlichen Informationsmengen kann man als wahre und scheinbare Entropien der betreffenden turbulenten Strömung bezeichnen. Auch dann, wenn die wahre Entropie infolge der Strukturbildung relativ niedrig ist, wird die scheinbare sehr hoch, wenn für die Darstellung der Felder keine Angaben über die Strukturen verfügbar sind und genutzt werden können. Definiert man die Strukturen als Elemente einer rationellen Beschreibung, so sind alle qualitativen und quantitativen Angaben, mit deren Hilfe es gelingt, die scheinbare Entropie des Vorgangs herabzusetzen, zugleich die formalen Charakteristiken der Strukturen.

Die Nutzung von Strukturdaten zur rationelleren Beschreibung der Geschwindigkeitsfelder $\vec{u}(\vec{r})$ kann beispielsweise so erfolgen: Ausgangspunkt sei eine formale Darstellung mit Hilfe einer Basis von n im betrachteten Bereich vorgegebenen Vektorfeldern $\vec{\varphi}_k(\vec{r})$, $k = 1, \ldots, n$ in der Form

$$\vec{u}(\vec{r}) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \vec{\varphi}_k(\vec{r}) \,. \tag{9}$$

Zur Sicherung der nötigen Genauigkeit sei es notwendig, die a_k durch m-stellige Binärzahlen darzustellen. Das bedeutet einen Informationsaufwand je Feld (d. h. eine scheinbare Entropie) von $n{\cdot}m$ Bit. Treten in den Feldern $\vec{u}(\vec{r})$ häufig bestimmte Bewegungsstrukturen auf, die annähernd durch eine parameterbehaftete Funktion $\vec{\psi}(\vec{r}, b_1, \ldots, b_p)$ dargestellt werden, dann wird bei geeigneter Festlegung der Parameterwerte $b_1, \ldots, b_p$ die Differenz

$$\delta\vec{u}(\vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}) - \vec{\psi}(\vec{r}, b_1, \ldots, b_p) \approx \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \vec{\varphi}_k(\vec{r}) \tag{10}$$

im Mittel geringer, und die nötige Genauigkeit ist schon gesichert, wenn man die c_k mit $m' < m$ Binärstellen angibt. Die dadurch mögliche Herabsetzung des Informationsaufwands ist dann in der Regel wesentlich größer, als die für die Identifizierung der Strukturen durch die Angabe der Parameter $b_1,\ldots,b_p$ erforderliche zusätzliche Information. Ist beispielsweise $n = 10^4$, $m = 16$, und entstehen durch die Subtraktion einer Funktion $\vec{\psi}$ mit $p = 10$ Parametern, die ebenfalls durch 16-stellige Binärzahlen ausgedrückt seien, Restfelder $\delta\vec{u}$, in denen die Geschwindigkeiten im Mittel nur halb so groß sind wie in den ursprünglichen Feldern, dann werden die c_k durch 15-stellige Binärzahlen hinreichend genau bestimmt. Die eingesparte Informationsmenge, d. h. die Herabsetzung der scheinbaren Entropie, beträgt dann

$$\delta H_S = (16\cdot 10^4 - 15\cdot 10^4 - 10\cdot 16)\,\text{Bit} \approx 10^4\ \text{Bit}. \qquad \textbf{(11)}$$

Voraussetzung dafür ist offenbar, daß wesentliche Bewegungsanteile durch eine Funktion mit einer geringeren Zahl von Parametern gekennzeichnet werden können. Diese Funktion beschreibt im Sinne der oben angegebenen Definition eine Struktur.

Daß mit der Abminderung δH_S zugleich ein quantitatives Gütekriterium für die Strukturfunktion gegeben ist, ist sicherlich ein nicht zu unterschätzender Vorzug dieser Definition. Mit Hilfe dieses Kriteriums kann man unterschiedliche Strukturbestinmungen vergleichen und zwischen konkurrierenden Auffassungen eine Entscheidung treffen. Legt man die Informationsmengen für die Angabe der a_k in (9) und der c_k in (10) nicht wie oben pauschal, sondern für jedes k einzeln fest, so wird die mit einer Strukturfunktion $\vec{\psi}\,(\vec{r}, b_1,\ldots,b_p)$ mögliche Herabsetzung der erforderlichen Informationsmenge bei genügend hohem n unabhängig von der geforderten Genauigkeit der Darstellung des Gesamtfeldes, und stellt dann - im Rahmen der zugrunde liegenden Methode der theoretischen Erfassung der Strömungsvorgänge - ein objektives Kriterium dar. (Die einschränkende Bemerkung entspricht dem anthropomorphen Charakter der Entropie in der statistischen Mechanik für das Nichtgleichgewicht [31], S. 114.)

Der Begriff der Information erweist sich somit als nützliches Werkzeug zur Überwindung der Definitionsssshwierigkeiten in der Turbulenztheorie. Sicherlich erschöpft sich das Wesen der kohärenten Strukturen nicht darin, das sie Elemente einer übersichtlicheren Beschreibung der scheinbar so verworrenen Vorgänge sind. Das bevorzugte Auftreten bestimmter organisierter Bewegungsabläufe folgt aus den Lösungseigenschaften der Bewegungsgleichungen. Die dadurch erzeugten Strukturen sind als physikalische Objekte aufzufassen, denen eine gewisse Selbständigkeit und Eigengesetzlichkeit innewohnt und die unter realen Bedingungen in vielfältig modifizierter, aber doch in ihren Grundzügen gleichartiger Form auftreten [32]. Diese weitere Fassung des Strukturbegriffs beeinträchtigt aber nicht den Wert der zuvor angegebenen formalen Definition.

8. Die Bedeutung der Strukturzerlegung für die Berechnung turbulenter Strömungen

Die absolut gesehen beträchtliche Verminderung des Informationsaufwands im Zahlenbeispiel des vorigen Abschnitts ist nur ein kleiner Bruchteil der insgesamt erforderlichen Informationsmenge zur vollständigen Darstellung der einzelnen Geschwindigkeitsfelder. Wäre diese tatsächlich notwendig, so hätte die Maßnahme nur einen geringen Nutzen. Für eine Strukturtheorie der Turbulenz, die (wie jede Theorie) vor allem die Grundlagen für praktische Berechnungen oder Entscheidungen liefern soll, ist daher die Frage der Beschreibung, des nach Abzug der Strukturen verbleibenden Restfelds ebenso wichtig wie die Beschreibung der Strukturen selbst. Dabei kann man voraussetzen, daß das Restfeld wenig strukturiert und statistisch weitestgehend unabhängig von den gesondert ausgewiesenen kohärenten Strukturen ist (inkohärenter Bewegungsanteil). Andernfalls müßte es möglich sein, weitere Strukturen zu isolieren, bzw. wäre es notwendig, bereits definierte Strukturen so zu korrigieren, daß die statistische Abhängigkeit herabgesetzt wird.

Wenig strukturiert bedeutet, daß die Informationsentropie der entsprechenden statistischen Gesamtheit in der Nähe ihres theoretischen Maximalwerts liegt. (Bei den Restfeldern der Turbulenz darf man das allerdings wegen der sicherlich auch im Restfeld noch vorhandenen Strukturen nicht allzu wörtlich nehmen, sondern sollte es als eine heuristisch nützliche Approximation betrachten.) Bei anderen Problemen der statistischen Physik hat es sich als möglich und vorteilhaft erwiesen, solche Gesamtheiten und die mit ihnen verbundenen Wirkungen durch eine geringere Anzahl statistischer Parameter zu beschreiben. Bei der Berechnung turbulenter Strömungen wurde dieses Verfahren bisher mit begrenztem Erfolg im Rahmen älterer Ansätze auf die gesamte Turbulenz und bei der numerischen Simulation der großmaßstäblichen Bewegungen [9], [13], [22] auf die Bewegungsanteile kleinen Maßstabs angewandt. Die Restturbulenz einer StrukturzerLegung bietet demgegenüber wesentlich günstigere Voraussetzungen für diese Art der Behandlung. Man kann geradezu sagen, daß erst die Strukturzerlegung die sachgemäße Realisierung des Konzepts der Simulation der großmaßstäblichen Bewegungsanteile ermöglicht und daß die Trennung in Anteile kleiner und großer Wellenzahl nur ein mit vielen Mängeln behaftetes Provisorium ist.

Zwischen den Begriffen der Struktur, der Informationsentropie und der statistischen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit sowie den (hier noch nicht erwähnten) Fraktaldinensionen [28], [35], [36] bestehen enge mathematische Beziehungen. Führt man einen dieser Begriffe in die Turbulenztheorie ein, so folgen zwangsläufig früher oder später auch die anderen. Diese Begriffe und Größen spiegeln eine Seite der Realität wider, die in der älteren statistischen Theorie der Turbulenz völlig unberücksichtigt geblieben war. Es handelt sich dabei um Eigenschaften und Erscheinungen, die in den anderen Teilgebieten der statistischen Physik (insbes. auch der Thermodynamik) seit langem schon durch die Entropie erfaßt werden. Die Turbulenz zeichnet sich offenbar nur dadurch aus, daß man bei ihr nicht mehr einfache Grenzgesetze anwenden kann, sondern zu einer tiefergehenden Analyse gezwungen ist.

Dem grundlegenden Charakter der genannten Begriffe entsprechend ist die informationstheoretisch begründete Strukturzerlegung in statistisch weitgehend unabhängige kohärente und nichtkohärente Anteile für alle Formen der Berechnung turbulenter Vorgänge von

Bedeutung. Bei der - heute noch nicht realisierbaren - vollständigen Berechnung der Geschwindigkeitsfelder durch numerische Lösung der Bewegungsgleichungen hilft sie, mit einem gegebenen Aufwand möglichst sichere statistische Aussagen zu erhalten und die unnötige Wiederholung von Berechnungen, die diesbezüglich keine Verbesserungen liefern, zu vermeiden. Der Erfolg der Anwendung statistischer Methoden, z. B. einer Hierarchie von Gleichungen zur Berechnung von Verteilungsfunktionen [27] hängt davon ab, ob es gelingt, den Vorgang in statistisch nahezu unabhängige Anteile zu zerlegen. Gerade das aber ist das Prinzip der Strukturzerlegung, die somit auch für die statistischen Methoden zur Berechnung von Turbulenzgrößen eine natürliche Grundlage ist.

Zur Lösung von Aufgaben, bei denen die Anwendung der vorstehend genannten Methoden zu aufwendig ist, werden heute vorwiegend empirische oder halbempirische Berechnungsverfahren genutzt. Auch für die dringend erforderliche Verbesserung der Genauigkeit und Erweiterung der Gültigkeitsbereiche dieser Verfahren ist die Strukturzerlegung ein erfolgversprechender Ansatzpunkt.

9. Halbempirische Berechnung turbulenter Strömungen mit Hilfe von Strukturmodellen

Grundlage und wesentliches Merkmal der halbempirischen Berechnungsverfahren ist nach [23] die Darstellung der Gesamtvorgänge aIs Systeme miteinander in Wechselwirkung stehender, relativ selbständiger und empirisch beschreibbarer komplexer Elemente. Eine gute Modellierung der Gesamtvorgänge ergibt sich dann, wenn die allen Strömungen der betrachteten Klasse gemeinsamen Eigenschaften (z. B. typische Formen von Geschwindigkeitsprofilen oder Bewegungsstrukturen) durch empirische Zahlenwerte oder Funktionen ausgedrückt werden und die Parameter, in denen sich die einzelnen Strömungen voneinander unterscheiden (Häufigkeit, Anzahl, Anordnung, Abmessungen usw. der empirisch beschriebenen Elemente), mit Hilfe der allgemeinen Bewegungsgleichungen oder daraus hergeleiteter spezieller Gleichungen (z. B, Impulssatz für die Grenzschicht) berechnet werden. Diese Voraussetzung war bei den älteren Verfahren zur Berechnung turbulenter Strömungen (insbes. den Verfahren zur Berechnung turbulenter Grenzschichten) sehr gut erfüllt. Im Rahmen der heute vielfach angewandten Mehrparametermodelle ist es hingegen nicht gelungen, Elemente zu definieren, für die sich in umfangreicheren Klassen turbulenter Strömungen einheitliche empirische Gesetzmäßigkeiten formulieren lassen, so daß die Genauigkeit und Sicherheit der mit diesen Modellen berechneten Ergebnisse für die Praxis unbefriedigend sind. Auch die Hinzunahme weiterer statistischer Parameter und der Abschluß des Systems bei Momenten höherer Ordnung brachten bisher trotz des erhöhten Rechenaufwands keine wesentlichen Fortschritte. Solange die theoretische Vorausberechnung turbulenter Strömungen noch nicht möglich ist, bleibt daher die Suche nach verbesserten empirischen Grundlagen für die halbempirische Berechnung eine aktuelle Aufgabe von großer praktischer Bedeutung.

Es gibt Anzeichen dafür, daß die an die empirischen Elemente zu stellenden Anforderungen von den kohärenten Strukturen erfüllt werden. In relativ umfangreichen Klassen von Strömungen (z. B. zwei- und dreidimensionalen Grenzschichten mit unterschiedlichen Druckgradienten, Polymerzusätzen usw.) treten annähernd gleichartige Strukturen auf, wobei der Bewegungsablauf im wesentlichen durch deren innere Dynamik bestimmt wird und die

Variation der Umgebungsbedingungen nur eine gewisse Anpassungsmodifikation bewirkt. Die Vielfalt der Gesamtströmungen kommt hauptsächlich durch die Unterschiede der Häufigkeit, der Abmessungen und der Formparameter der Strukturen zustande. Wie bei allen empirischen und halbempirischen Verfahren läßt sieh die Tragfähigkeii und Brauchbarkeit einzelner Ansätze nur durch die praktische Erprobung endgültig feststellen.

Zugunsten der Entwicklung von Berechnungsverfahren auf der Grundlage empirischer Beziehungen für die Dynamik der Strukturen spricht auch, daß damit nach den Ausführungen des vorangehenden Abschnitts alle Verfahren eine einheitliche Basis erhalten, wodurch sich zwischen den verschiedenen Vorgehensweisen nützliche Querverbindungen ergeben. Die Nutzung der Ergebnisse der Strukturuntersuchungen für die halbempirische Berechnung ist daher auch nicht als kurzfristige Notmaßnahme anzusehen, sondern als sinnvolle Vorstufe für den schrittweisen Übergang zur vollständig theoretischen Berechnuung. Da auch noch andere Überlegungen für die Entwicklung halbempirischer Strukturmodelle zur Berechnung turbulenter Strömungen sprechen, gibt es bereits mehrere ernsthafte und erfolgversprechende Ansätze in dieser Richtung [5], [20], [34]. Über die Arbeiten der Verfasser zur Entwicklung eines Strukturmodells für turbulente Grenzschichten wird in [26] berichtet.

10. Bemerkungen zu ähnlichen theoretischen Ansätzen

Die Irreversibilität der turbulenten Vorgänge legte ihre Untersuchung unter dem Aspekt der Entropieproduktion und die Übertragung von Gesetzmäßigkeiten der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse und der dabei auftretenden Strukturbildung auf diesen Fall nahe [11], [18]. Dabei wird jedoch ausschließlich die Entropie der thermodynamischen Zustände betrachtet und keine Entropie zur Kennzeichnung der makroskopischen Vielfalt eingeführt. Infolgedessen gibt es auch keine Verbindung zum Informationsaufwand für die Darstellung der Vorgänge und zur praktischen Berechnung.

Als Entropie des makroskopischen Strömungsfelds wurde in [29], [38] die Kolmogoroffsche Entropie dynamischer Systeme erwähnt, jedoch nichts über eine weitergehende theoretische Nutzung dieser Größe ausgesagt. Krasovskij [17] wendet die Boltzmann-Shannon-Entropie bei der Untersuchung des statistischen Verhaltens beliebiger makroskopischer Systeme an. Seine Überlegungen und Ergebnisse wurden bei den Arbeiten der Verfasser direkt genutzt.

Zwischen der Shannonschen Informationsentropie und den Fraktaldimensionen (Hausdorff-Dimension) besteht ein enger theoretischer Zusammenhang [28]. Daher sind die Arbeiten über die Dimension des Attraktors der Bewegungsgleichungen [36] und die Fraktaldimension der Grenzflächen zwischen turbulentem und nichtturbulentem Fluid [35] hier mit einzuordnen. Alle diese Arbeiten lassen den Schluß au, daß es sinnvoll und notwendig ist, in die Turbulenztheorie eine Entropie oder ein anderes gleichwertiges Maß für die makroskopische Vielfalt einzuführen. Auch die Tatsache, daß heute in allen Zweigen der physikalischen Statistik ein solches Maß verwendet wird und eine wichtige Rolle spielt, sollte als ein deutlicher Hinweis darauf verstanden werden. Welche weitreichende Bedeutung eine solche Größe für die Theorie und Berechnung turbulenter Strömungen haben kann, wurde hier in groben Zügen darzulegen versucht.

Literatur

[1] Albring, W.: Rückblick und Zielpunkte der Turbulenzforschung. Wiss. Z. d. TU Dresden 19 (1970) 975 - 979

[2] Albring, W.: Elementarvorgänge fluider Wirbelbewegungen. Berlin: Akademie-Vsrlag 1981

[3] Albring, W.: Statistik und determiniertes Ordnungsystem vom Blickpunkt der Turbulenzeforschung. Maschinenbautechnik 33 (1984) 491 - 496

[4] Batchelor, G. K.: The theory of homogeneous turbulence. Cambridge University Press 1956

[5] Beljaars, A. C. M., Prasad, K. K., DeVries, D. A.: A A structural model for turbulent exchange in boundary layers. J. Fluid Mech. 112 (1981) 33 - 70

[6] Cantwell, B. J.: Organized motion in turbulent flow. Ann. Rev. Fluid Mech. 13 (1981) 457 - 515

[7] Coles, D.: Dryden Lecture A.I.A.A. 1985

[8] Crow, S. C., Champagne, F. H.: Orderly structure in jet turbulence. J. Fluid Mech. 48 (1971) 547 - 591

[9] Deardorff, J. W.: A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds number. J. Fluid Mech. 41 (1970) 453 - 480

[10] Dreszer, J. (Herausg.): Mathematik-Handbuch für Technik und Naturwissenschaft. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1975

[11] Ebeling, W.: Strukturbildung bei irreversiblen Prozessen. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1976

[12] Edwards, S. F.: The statistical dynamics of homogeneous Turbulence. J. Fluid Mech. 18 (1964) 239 - 273

[13] Ferziger, J. H.: Large Eddy Numerical Simulations of Turbulent Flows. AIAA-J. 15 (1977) 1261 - 1267

[14] Hussain, A. K. M. F.: Coherent structures and turbulence. J. Fluid Mech. 173 (1986) 303 - 356

[15] Jaglom, A. M. und Jaglom, I. M.: Wahrscheinlichkeit und Information. Deutscher Verl. d. Wiss. Berlin, 4. Aufl. 1984

[16] Kline, S. J., Reynolds, W. C., Schraub, F. A., Runstadler, P. W.: The structure of turbulent boundary layers. J. Fluid Mech, 30 (1967) 741 - 773

[17] Krasovskij, A. A.: Fazovoe prostranstvo i statisticeskaja teorija dinamiceskich sistem, Nauka Moskau 1974

[18] Leuschner, D., Walden, F., Hackeschmidt, M.: Paradigma zur Anwendung der irreversiblen Thermodynamik auf die Turbulenz, insbssondere auf die der ebenen Kanalströmung. Technische Mechanik 2 (1981) 82 - 87

[19] Mahnke, R.: Komplexität und Evolution von Biosequenzen. Dresdner Seminar f. theoret. Physik, Sitzungsber. Nr. 10: Ausg. Probl. d. Theorie irrev. Prozesse. Dresden 1980, S. 50 - 53

[20] Malin, M. R., Spalding, D. B.: A two-fluid model of turbulence and its application to heated plana jets and wakes. Physico-Chemical Hydrodynamics 5 (1984) 339 - 362

[21] Mascheck, H.-J.: Spektralzerlegung inhomogener turbulenter Strömungen in nichtkorrelierende Anteile. Wiss. Z. TU Dresden 14 (1965) 107 - 108

[22] Mascheck, H.-J.: Bemerkungen zur numerischen Integration der Bewegungsgleichungen für inkompressible Strömungen bei hohen Reynoldszahlen. Wiss. Z. TU Dresden 16

(1967) 1227 - 1228
[23] Mascheck, H.-J.: Über einige Grundlagen der halbempirischen Berechnungsverfahren in der Strömungstechnik. Habilitationsschrift TU Dresden 1967
[24] Mascheck, H.-J.: Grundzüge einer Theorie der Strukturmodelle in der statistischen Strömungsmechanik. TU Dresden, Sekt. 12, WB Strömungstechnik, Forsch.-Ber. 1292 (1984)
[25] Mascheck, H.-J.: Informationstheoretische Beschreibung der Turhulenz. Wiss. Z. TU Dresden 29 (1980) 467 - 470. Preprints TU Dresden 12-01-79 und 12-01-80
[26] Mascheck, H.-J., Leuschner, D.: Strukturmodell der turbulenten Grenzschicht. Erscheint in Wiss. Z. TU Dresden, Heft 6/1988
[27] Montgomery, D.: A BBGKY-framework for fluid turbulence. Phys. Fluids 19 (1976) 802 - 810
[28] Pötschke, D., Sobik, F.: Mathematische Informationstheorie. Akademie-Verlag Berlin 1980
[29] Rabinovic, M. I.: Stochasticeskie avtokolebanija i turbulentnost'. Uspechi fiziceskich nauk 125 (1978) 123 -168
[30] Renyi, A.: WahrscheinLichkeitsrechnung mit einen Anhang über Informationstheorie. Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1971
[31] Röpke, G.: Statisifsche Mechanik für das Nichtgleichgewicht. Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1987
[32] Sackov, J. V.: Wahrscheinlichkeit und Struktur. Akademie-Verlag Berlin 1978 (WTB Bd. 243)
[33] Smagorinsky, J.: General Circulation Experiments with the Primitive Equations. Monthly Weather Review 91 (1963) 99 - 165
[34] Spalding, D. B.: Two-Fluid Models of Turbulence. Preprint CFD/85/4, Imperial Coll. of Science, April 1985
[35] Sreenivasan, K. R., Meneveau, C.: The fractal facets of turbulence. J. Fluid Mech. 173 (1986) 357 - 386
[36] Troger, H., Kacani, V., Stribersky, A.: Zur Dimension seltsamer Attraktoren. ZAMM 65 (1985) T 109 - T 111
[37] Zaric, Z.: Statistical evidence on the phenomena in wall layers of turbulent flows. NATO Advanced Study Inst., Istanbul 1978, 377 - 401. Physical evidence on coherent structures in the wall layers of turbulence. ebenda S. 403 - 440
[38] Zaslavskij, G. M., Racko, Ch.-R. Ja.: Zurnal eksper. i teoret. fiz. 76 (1979) 2052 - 2064